Alles ohne Erfahrung?
Über Freude und Leid des Apriorismus.

von Ulrich Nortmann

Vortrags-Essay im Rahmen des „Mathematischen Salons"
im Hausdorff Research Institute for Mathematics, Bonn, am 14. 10. 2010

1. Lyrik I: Natur und Technik

Ich möchte damit beginnen, Ihnen zwei Gedichte zu zeigen. Deren Zusammenhang mit dem Essay-Thema wird sich dann bald erkennen lassen. Das erste Gedicht ist in gewisser Weise dem Genre der Naturlyrik zuzuordnen, auch wenn darin, außer von einem verirrten Hasen, von Gegebenheiten die Rede ist, die man jedenfalls in romantischer Naturlyrik nicht anzutreffen erwarten würde: von Neonlicht, Computermonitoren und Druckern, von Rechnerarchitekturen ebenso wie, andeutungsweise, von physikalischer Theoriearchitektur, beides gleicherweise, versteht sich, von Mathematik durchsetzt.

Ein Hase im Rechenzentrum (1991)

Die schnellste Maschine,
Parallelarchitektur,
knapp tausend Megaflops,
vermag seinem kleinen Gehirn
nicht zu folgen.

Die bebende Oberlippe
zuckend im Neonlicht,
die großen Augen starr
auf den Bildschirm gerichtet,
trommelt er panisch
gegen das graue Linoleum.

Dann, es ist drei Uhr früh,
der letzte Plasmaphysiker
ist nach Hause gegangen,
schnellt er plötzlich hoch
und jagt im Zickzack
zwischen Monitoren
und stotternden Druckern
durch den verlassenen Raum.

Weicher Feigling,
fünfzig Millionen Jahre
älter als wir!
Dem Blutdurst der Jäger,
der Ramme, dem Gas,
dem Virus entkommen,
schlägt er ungerührt seine Haken.

Aus dem Eozän hoppelt er
an uns vorbei in eine Zukunft,
reich an Feinden,
doch nahrhaft und geil
wie der Löwenzahn.

Hier soll offenbar ein Lob erdverbundener, robuster Vitalität gesprochen werden. Wobei übrigens nicht völlig klar ist, ob der Dichter wirklich an den Hasen denkt, dessen Spezies es gar nicht mehr so gut geht in weiten Teilen Europas, oder vielmehr an das Kaninchen – aber egal: Dem Hasen oder Kaninchen, mit vergleichsweise kleinem Gehirn ausgestattet, dabei blutvoll-saftig-geil (mithin für die Fressfeinde nahrhaft) auf vier gelegentlich trommelnden Pfoten meist fest im Leben stehend, es wird ihm eine langfristig erfolgreiche Zukunft prophezeit. Auf der anderen Seite haben wir: die komplizierte Technik, die artifizielle Umgebung des Rechenzentrums, vermutlich in blutarm-fahlem Grau-Weiß gehalten, und die hereinspielende, hochgezüchtete Theoriebildung der Plasmaphysiker, die, man sieht sie bis in die Morgenstunden hinein zwischen den Apparaten herumgeistern, einen der Künstlichkeit der Umgebung durchaus entsprechenden Arbeitsstil pflegen. Zur Prognose dieser Lebensform wird wenig gesagt, im Wesentlichen dies: Der Hase hoppelt an uns vorbei, das heißt er überholt uns, ziemlich gleichgültig gegenüber unseren Geschicken. Und im Übrigen enthält vielleicht die vorletzte Strophe, in der zunächst nur von speziellen Bedrohungen des *Hasen* – „Blutdurst der Jäger" – die Rede zu sein scheint, ein paar Andeutungen zu Phänomenen, die sich im Zuge der menschlichen Kultur- und auch Unkulturentwicklung gegen den Menschen selbst gewendet haben: Kriegstechnik, Ramme, Gas, die den Hasen allenfalls am Rande mitbetroffen haben und ihm wenig Abbruch taten.

2. Lyrik II: Weißeste aller Welten

Vergleichen Sie nun zu diesem Gegensatz: saftige, lebenskräftige Geilheit hier, hochgezüchtete, fahle Geisterhaftigkeit da, ein zweites Gedicht desselben Autors über eine andere „weiße Welt", womöglich noch viel weißer als die des Rechenzentrums. Der Titel: „Die Mathematiker". Sie können, wenn Sie Mathematikerin oder

Mathematiker sind, das Gedicht mit Humor nehmen. Sie können sich auch darüber ärgern. Seien Sie in diesem Fall nicht zu besorgt um das nach außen dringende Bild der mathematischen Zunft. Ich werde die Provokation rechtzeitig auf ein vernünftiges Maß zurückschrauben.

Die Mathematiker (1991)

Wurzeln, die nirgends wurzeln,
Abbildungen für geschlossene Augen,
Keime, Büschel, Faltungen, Fasern:
diese weißeste aller Welten
mit ihren Garben, Schnitten und Hüllen
ist euer Gelobtes Land.

Hochmütig verliert ihr euch
im Überabzählbaren, in Mengen
von leeren, mageren, fremden
in sich dichten und Jenseits-Mengen.

Geisterhafte Gespräche
unter Junggesellen:
die Fermatsche Vermutung,
der Zermelosche Einwand,
das Zornsche Lemma.

Von kalten Erleuchtungen
schon als Kinder geblendet,
habt ihr euch abgewandt,
achselzuckend,
von unseren blutigen Freuden.

Wortarm stolpert ihr,
selbstvergessen,
getrieben vom Engel der Abstraktion,
über Galois-Felder und Riemann-Flächen,
knietief im Cantor-Staub,
durch Hausdorffsche Räume.

Dann, mit vierzig, sitzt ihr,
o Theologen ohne Jehova,
haarlos und höhenkrank
in verwitterten Anzügen
vor dem leeren Schreibtisch,
ausgebrannt, o Fibonacci,
o Kummer, o Gödel, o Mandelbrot,
im Fegefeuer der Rekursion.

Nun, die Presse der Mathematiker in der schönen Literatur, sie ist im Allgemeinen tatsächlich nicht besonders gut. Auf krasse Fälle will ich gar nicht näher eingehen wie das in Friedrich Torbergs Roman „Der Schüler Gerber“ (1930) gezeichnete Bild des Gymnasialprofessors der Mathematik Artur Kupfer, von den Schülern und insgeheim wohl auch von ihm selbst „Gott Kupfer“ genannt. Mathematik ist nicht einfach. Daher kann sie, die mit ihren immanenten Problemstellungen schon Herausforderung genug ist, als Druckmittel und Machtvehikel sozial missbraucht werden, und in der Folge wird ihr mancher feind. Dagegen ist *unser* Dichter, in beiden Fällen: Hans Magnus Enzensberger, wie fast jeder weiß ein großer Freund der Mathematik und damit dann wohl auch der Mathematiker – von denen es im Übrigen, wie sonst überall auch, solche und solche gibt: Junggesellen und Verheiratete, Wortarme und Beredte, Ausgetrocknete und Überschäumende. Von daher ist ziemlich klar, dass Enzensberger es sich im zweiten Gedicht angelegen sein lässt, ein Klischee gleichsam zu zelebrieren, für dessen Wirklichkeitsnähe als ein Psycho- oder Soziogramm der Mathematik-Treibenden er die Gewähr nicht ernsthaft übernehmen würde. Aber die Karikatur, eine solche ist es, enthält einige Striche Wahrheit, und die haben u. a. mit dem vollkommen (?) nicht-empirischen Charakter der Mathematik zu tun. Über diesen Charakter sind die, welche Mathematik treiben oder über Mathematik reflektieren oder beides, sich weitgehend einig, soweit ich sehe. Ich sage allerdings „weitgehend“; denn es gibt ein paar Ausnahmen. Sogenannte Holisten beispielsweise wie Willard Quine, der bedeutendste amerikanische Philosoph des letzten Jahrhunderts, sagen folgendes, sinngemäß: Wenn beispielsweise im Rahmen der Physik Hypothesentests angestellt werden, dann ist zu beachten, dass in die Ableitung einer erfahrungsnahen Aussage aus einem Ensemble teils hochtheoretischer physikalischer Aussagen so ziemlich immer auch beträchtliche Stücke Mathematik einfließen, zusätzlich zu der meist gar nicht deutlich wahrgenommenen, aber sozusagen im Untergrund omnipräsenten Logik. Scheitert nun die abgeleitete Aussage oder Prognose an der empirischen Wirklichkeit, so muss *irgend* etwas von dem falsch gewesen sein, was an theoretischem Apparat, als Prämisse oder unterwegs, in die Ableitung eingespeist wurde, ganz richtig. Der Holist, zu griechisch *tò hólon* = das Ganze, sagt dementsprechend: Die Gesamtheit steht auf dem Prüfstand; man muss unter Umständen auch einmal dazu bereit sein, die logischen oder mathematischen Zahnräder des Apparats der Deduktion wegzuwerfen oder abzuändern, und das, wohlgemerkt, aus empirischer Veranlassung.

In Quines Aufsatz „Two Dogmas of Empiricism“ von 1951 liest sich diese Annäherung logisch-mathematischer Aussagen an den Bereich dessen, was empirischer Bewährung oder Kritik unterworfen sein kann, folgendermaßen:

> „… no statement is immune to revision. Revision even of the logical law of the excluded middle has been proposed as a means of simplifying quantum mechanics; and what difference is there in principle between such a shift and the shift whereby Kepler superseded Ptolemy, or Einstein Newton, or Darwin Aristotle?“

Ich halte diese Sichtweise für einen Irrtum. Experimente mit der empirischen Wirklichkeit können, im Gegensatz zu den inner-mathematischen „Experimenten" (= Einzelfall-Betrachtungen, als möglichen heuristischen Sprungbrettern für die Bildung allgemeinerer mathematischer Hypothesen, zu deren Begründung dann, über die Verankerung in Einzelfällen hinaus, ein Beweis erforderlich ist), über die beim vorigen Salon Herr Harder gesprochen hat, für mathematische Geltungsfragen nicht von Belang sein. *Was* allerdings passieren kann, ist, dass durch Erfahrungen auch einmal die Adäquatheit der Repräsentation bestimmter empirischer Gegebenheiten durch bestimmte mathematische Objekte in Frage gestellt wird. Einige Repräsentationen waren über die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik hinweg derartig erfolgreich und erscheinen inzwischen so selbstverständlich, dass man sich eine empirisch veranlasste Infragestellung kaum noch vorstellen kann: Wie bei den Kräften, die, gerichtet wie sie sind und über einen Betrag verfügend, durch Vektoren, natürlich, mathematisch repräsentiert werden. Anderes erscheint riskanter, weniger naheliegend jedenfalls: Wie dass quantenmechanische Observable als gewisse Operatoren auf Funktionenräumen repräsentiert werden, hier z. B. der Impulsoperator bzw. der Energieoperator:

$$\frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\partial \ldots}{\partial x}, \; i\hbar \cdot \frac{\partial \ldots}{\partial t}.$$

Dass diese Repräsentationen so ihre Richtigkeit haben und es anders gar nicht sein kann, das ist nicht so klar. Aber kein möglicher Ausgang eines physikalischen Experiments könnte die Geltung eines *inner*-mathematischen Theorems über, sagen wir, die Eigenwerte eines solchen Operators oder den Wert des Produkts der Streuungen zweier solcher Operatoren tangieren. (Was nun nicht heißt, dass die Heisenbergsche Unschärferelation etwa ein *mathematisches* Faktum wäre; wohl aber gibt es einen von der den physikalischen Mikrokosmos betreffenden Relation und ihrer Begründung abspaltbaren mathematischen Anteil.)

Es bleibt also insoweit beim nicht-empirischen oder beim „apriorischen" Charakter der Mathematik, wie man es mit dem seit Kant in Gebrauch gekommenen Wort sagt. Es ist u. a. dieser Charakter, den Enzensberger im zweiten Gedicht thematisiert. (a) Erste Strophe, die Wurzeln, mit denen in der Mathematik, etwa in der Galoisschen Theorie, umgegangen wird, wurzeln nicht im Ackerboden irgendeiner empirischen Welt. Auffallend ist übrigens hier wie in der Garbentheorie der irgendwie einnehmende Gegensatz zwischen der gewissen Rustikalität des Vokabulars – „Wurzeln", „Keime", „Garben" – , möglicherweise in bewusstem *understatement* so gewählt, und der Abstraktheit seines Inhalts. (b) Ebenfalls erste Strophe, so oft wie kaum von irgend etwas sonst ist in der Mathematik von „Abbildungen" die Rede – von Abbildungen, die, sagen wir, Isomorphien stiften, durch Matrizen beschreibbar sein können, stetig sein können usw. usw. „Abbildungen" sind etwas, das man dem Wort nach mit den Augen anzuschauen hätte wie die Abbildungen im Versandhauskatalog; und doch braucht es im Prinzip für die Mathematik den optischen Zugang zur Wirklichkeit nicht, weder bei den Abbildungen noch sonst irgendwo (*mutatis mutandis* für die anderen Sinneskanäle). Der gegen Ende seines Lebens erblindete und dennoch mathematisch weiterhin produktive Euler hat es vorgemacht.

3. Conditio mathematica

Der apriorische Charakter des Unternehmens hat eine Reihe von Konsequenzen. Es gibt für den Mathematiker und die Mathematikerin keine äußere Instanz, die ihnen die Theorien ruinieren könnte. Eine noch so schön aufgezogene physikalische Theorie muss weggeworfen werden, wenn sie nicht zur empirischen Wirklichkeit passt (es sei denn, dass Teile von ihr als abstrahierte *mathematische* Theoriestücke überleben können). Diese Art von unabhängiger intellektueller Existenz, die die Mathematiker führen können – unter *sich* machen sie aus, was gilt und was fehlerhaft argumentiert ist, keine blöde Materie (außer der, die sie vielleicht selbst sind) wird ihnen mit einem zur Theorie nicht passenden Benehmen hineinregieren –, sie ist für Geister mit Drang zur Freiheit eine sehr erfreuliche Sache.

Sie hat aber auch ihre Schattenseiten. Man muss, erstens, gute Nerven haben. Der Mathematiker insbesondere, der Forschung treibt, ist genötigt, jedes Resultat allein aus sich selbst herauszuholen – zugegeben: meist auch noch aus anderen Mathematikern, mit denen er, oder sie, in der Regel seine/ihre Argumentationen nutzbringend diskutieren kann. Er kann nicht etwa nach einer grübelnd durchgebrachten Nacht ins Labor gehen oder ins Enzensbergersche Rechenzentrum, um zu sehen, ob er denn aus den heute endlich vorliegenden Messdaten den entscheidenden Hinweis darauf beziehen kann, wohin die Theoriereise gehen muss. Ich spreche hier von Mess-Daten, d. h. von Daten, die an *physischen* Systemen durch Messung, auf *kausalen* Interaktionen beruhend, erhoben wurden. Ich spreche nicht von mathematischen Einzelfällen, beispielsweise einzelnen arithmetischen Beziehungen, auf die durchaus auch einmal (wenn es etwa um *sehr* große Zahlen ging) ein Computer angesetzt gewesen sein kann und die dann allerdings kreativer mathematischer Verallgemeinerung die Richtung weisen könnten. Nein, es gibt für den Mathematiker kein Hinschauen, auch kein technisch noch so subtil aufgerüstetes Hinschauen irgendwohin nach *draußen*, das ihm weiterhelfen könnte; letztlich ist er ganz auf eine innere Tätigkeit der Entwicklung von Argumentationen verwiesen, um dem Unsichtbaren, dem nun wirklich vollkommen und prinzipiell Unsichtbaren, etwas über dessen Beschaffenheit zu entreißen. Das kann durchaus nervenzerdehnend sein, wo es über längere Zeitspannen hinweg zu keinerlei Ergebnis führt und das Risiko des möglichen Scheiterns aller noch so klugen Beweisansätze – im äußersten Fall: Gödelsche Unvollständigkeit! – vor Augen stellt. Demgegenüber die

Natur: Sie ist so entgegenkommend, eigenschaftlich definit zu sein: Alles verhält sich mit ihr entweder so, oder es verhält sich nicht so; und im Experiment gibt sie meistens eine irgendwie verwertbare Antwort. Jene Verwiesenheit im Wesentlichen auf den eigenen Kopf und nichts sonst, sie kann, in Verbindung mit der oft genug schwindelerregenden Komplexität der gefragten Argumentationen, zu jenen vorübergehenden Phasen der völligen Vertiefung in ein Problem führen, ja des manchmal dann wohl auch schon verzweifelten Anrennens gegen das Problem, die unser Dichter in einer ihm gestatteten Zuspitzung als geisterhaft-weltabgewandte Existenzweise ungeselliger Theoretiker stilisiert, oder die er dann sogar als Dienst vorm Altar der Abstraktion mit einem quasi theologischen Duft imprägniert sein lässt.

Darüber, über dieses Anrennen mit rein geistigen Mitteln gegen eine um ein unsichtbares Land gezogene unsichtbare Mauer und was es affektiv bedeutet, würde ich gern einmal eine Novelle oder einen Roman lesen; meines Wissens gibt's das nicht. Stefan Zweig wäre dafür gut gewesen – wenn er etwas von Mathematik gewusst hätte. Musil hat die Chance verpasst, und Enzensberger scheint leider keine guten Romane schreiben zu können, oder er will nicht.

Vielleicht muss man ab und zu Hochschulleitungen, zu deren Geschäft es gehört, auf äußere Parameter wie zählbare Promotionserfolge zu schauen, an alle die erwähnten Aspekte, insbesondere an den Risiko-Aspekt, der *conditio mathematica* erinnern.

Zweitens, es muss der Mathematiker – halten wir das weibliche Genus hier der Höflichkeit halber ganz heraus – zur Dickfelligkeit in der Lage sein, nämlich z. B. dann, wenn er sich auch für das interessiert, was seit ungefähr hundert Jahren als Arbeit an den *Grundlagen* der Mathematik etabliert ist (auch dank einschlägigen Beiträgen Hausdorffs übrigens). Er darf sich nämlich nicht, wenn er Ernst machen will mit dem apriorischen Charakter der Mathematik, zu schade sein, z. B. die Frage zu stellen, wieso denn 3 + 2 gleich 5 gilt – auch wenn ihm dies vielleicht den Spott anderer einträgt, da dies ja völlig klar und keiner Überlegung eines vernünftigen Menschen wert sei. Nein, so klar ist das gar nicht. Denn es wäre ja bei dem apriorischen Charakter der Mathematik keineswegs sachgerecht, etwa zu sagen: Haben wir uns oft genug doch schon dazu hinreißen lassen, auf drei Schöppchen Wein zwei weitere folgen zu lassen und danach jedesmal fünf bezahlt, also … Das wäre empirisch, es wären Zähl-Erfahrungen, und das kommt hier nicht in Betracht. *Begriffe* wie den Anzahlbegriff hätte man sicherlich ohne Erfahrungen mit der äußeren Welt, ohne z. B. mit den Augen Schafherden zu sehen und sie hinsichtlich ihrer Größe miteinander zu vergleichen, niemals gebildet. Aber die *Genese* von Begriffen ist eine Sache, die *Geltung* und die Begründung der Geltung von mit ihnen gebildeten Aussagen sind eine andere Sache.

Eigentlich wusste man schon im 17. Jahrhundert, wie eine sachgerechte, erfahrungsunabhängige Rechtfertigung solcher Beziehungen wie „3 + 2 = 5“ durch Beweis angelegt werden muss. Der Sache wirklich auf den Grund zu gehen, auf den vorläufig letzten Grund, ist man aber erst seit ungefähr 80 Jahren und der Etablierung der axiomatischen Mengentheorie in der Lage. Das können wir uns abschließend einmal näher ansehen.

4. Unendlichkeitsaxiom und „3 + 2 = 5“

Zu beweisen sei also die Beziehung

$$3 + 2 = 5 \,.$$

Von nichts kommt ein Beweis nicht, man wird also erwarten, dass außer der wie gesagt einigermaßen omnipräsenten Logik die eine oder andere definitorische Festlegung in eine Begründung hineinzustecken sein wird. Richtig, es wird rekursiv die Addition definiert:

$$n + 0 = n \,,$$

$$n + s(m) = s(n + m) \,, \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N};$$

es werden einige natürliche Zahlen im einzelnen definiert:

$$2 = s(1) \,, 1 = s(0) \,.$$

Und natürlich muss, wer der Sache auf den Grund gehen will, weiterfragen: Woher kommt denn die Existenz der Null, was soll denn die Menge $\mathbb{N}$ sein, woher kommt denn die Nachfolgerfunktion s, und wie hat man sie sich definiert zu denken? Aber das verschieben wir auf etwas später, um zunächst die Argumentation ablaufen zu sehen, wie sie im Prinzip etwa Leibniz schon bekannt war:

$$3 + 2 = 3 + s(1)$$

(mit der Definition der 2 und mit etwas Identitätslogik: etwas durch etwas Gleiches ersetzt in einem Kontext ergibt Gleiches)

$$= s(3 + 1) \qquad \text{(mit der Definition der Addition)}$$

$$= s(3 + s(0))$$

$$= s(s(3 + 0))$$

$$= s(s(3))$$

$$= s(4)$$

$$= 5\,,$$

wenn man sich noch 4 als $s(3)$ und 5 als $s(4)$ definiert denkt. Doch woher nun 0, woher s und $\mathbb{N}$? Man kann definieren $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch:

$$x \mapsto x \cup \{x\}\,.$$

Das führt dann mit der Definition $0 = \{\ \}$ auf folgende Erklärungen der einzelnen natürlichen Zahlen

$$1 = \mathrm{s}(0) = \{\ \} \cup \{\{\ \}\} = \{0\},$$
$$2 = \mathrm{s}(1) = 1 \cup \{1\} = \{0{,}1\},$$

und immer so weiter nach dem Muster: Jede natürliche Zahl n ist definiert als die Menge ihrer Vorgänger (mit 0 beginnend), also als eine ganz bestimmte n-elementige Menge. Das ist eine sehr vernünftige Sache. Man ist jetzt beispielsweise in der Lage zu sagen, was Zählen ist: Schoppen Weines zu zählen etwa mit dem Ergebnis 17 heißt, eine bijektive Beziehung zwischen der Zahl 17, als Menge, und der betreffenden Menge von Schoppen herzustellen.

Natürlich stehen nun, das wird Sie nicht mehr überraschen, für den, der den Dingen so weit wie möglich auf den Grund gehen will, neue Fragen im Raum: Woher kommt die Vereinigung von Mengen, woher die leere Menge? Dazu könnte man einiges sagen, ich will es aber jetzt auf sich beruhen lassen. Wir hatten ja noch eine andere Frage auf der Liste: Woher kommt $\mathbb{N}$? Man definiert:

$$(\clubsuit)\ \mathbb{N} = \bigcap_{\substack{\varnothing\in M,\\ \text{und: wenn}\\ x\in M,\ \text{dann}\\ x\cup\{x\}\in M}} M.$$

M soll also die kleinste Menge sein, welche die 0 als Element enthält und welche unter der Nachfolgerbildung abgeschlossen ist. Dies ist eine ganz glücklich gemachte Definition, denn sie ermöglicht u. a. eine Begründung des Induktionsprinzips, das dann nicht länger als Axiom geführt zu werden braucht: Gilt $\alpha[0]$ und $\forall x(\alpha[x] \to (\alpha[s(x)])$, so ist die Menge $\{x \mid \alpha[x]\}$ eine der Mengen M, die an der Durchschnittsbildung bei ($\clubsuit$) beteiligt sind, und folglich gilt: $\mathbb{N} \subseteq \{x \mid \alpha[x]\}$, d. h. die Bedingung $\alpha[\ldots]$ wird von allen natürlichen Zahlen erfüllt. Aber die Definition ($\clubsuit$) wirft neue Fragen auf: Woher kommt der Durchschnitt von Mengen? Woher wissen wir, dass überhaupt etwas passiert bei der auf der rechten Seite des Kleeblatts angezeigten Durchschnittsbildung, m. a. W.: Woher wissen wir, dass es mindestens eine Menge M der beim Kleeblatt gefragten Art gibt?

Hier, ganz dicht am Grund der Angelegenheit, beginnt dieser Grund nun auf einmal ein wenig zu schwanken. Wir wissen jenes nämlich eigentlich gar nicht recht, vielmehr *fordern* wir es. Ein mengentheoretisches Axiom, das man als Unendlichkeitsaxiom bezeichnet, postuliert genau dies: Dass es mindestens eine Menge gibt, welche die leere Menge als Element enthält und welche mit jedem Element x auch die Menge $x \cup \{x\}$ enthält. Man kann sich klarmachen, dass eine solche Menge keine endliche Menge sein kann, daher die treffende Bezeichnung „Unendlichkeitsaxiom".

5. Wirklich „alles ohne Erfahrung"?

Fordern kannst du vieles. Sollte es nicht doch besser etwas geben, das uns *wissen* lässt, dass die Forderung des Unendlichkeitsaxioms erfüllt ist? Aber ein Beweis kann uns ein solches Wissen nicht liefern, denn wir sind an dieser Stelle bei einem der Endpunkte (sagen wir vorsichtig: der vorläufigen Endpunkte) aller Beweise, oder andersherum betrachtet: Anfangspunkte aller Beweise, angelangt. Gibt es an solchen Stellen dann vielleicht doch, obwohl ich es bisher ziemlich entschieden bestritten habe, einen Einbruch von Erfahrung in die Geltung mathematischer Aussagen? Ich will jetzt gern zugeben, dass ich es mir vorhin mit meiner Bestreitung jeglicher Empirizität der Mathematik und der Betonung ihres apriorischen Charakters um der Deutlichkeit willen erlaubt habe, die Dinge etwas holzschnittartiger darzustellen, als sie es sind. Immerhin bleibt es auch, was das Unendlichkeitsaxiom angeht, bei der Feststellung: Wir können dieser Aussage nicht mit Erfahrungen der *äußeren* empirischen Welt unter die Arme greifen. Denn wir mögen zwar wahrnehmen, dass es um uns herum sehr, sehr viele Dinge gibt; aber dass es unendlich viele wären, nimmt keiner wahr. Doch vielleicht gibt es bestimmte *innere* Erfahrungen, die uns sagen: Wir können gewisse mentale Operationen immer weiter iterieren, und vielleicht sind es solche Erfahrungen, aus denen das Unendlichkeitsaxiom dann seine Glaubwürdigkeit für uns bezieht? Also doch nicht alles ohne Erfahrung, wie es schon ja das Fragezeichen im Essaytitel als eine Möglichkeit signalisierte?

Sie merken an meinen tastender werdenden Formulierungen, wie offen hier, am Grund (nicht am Abgrund, wir wollen nicht unnötig dramatisieren), die Dinge möglicherweise sind. Deshalb will ich für heute schließen und damit zufrieden sein, Ihnen vielleicht einigen Stoff zum Nachdenken mitgegeben zu haben.